Formelsammlung für Investition und Finanzierung

INHALTSVERZEICHNIS

1. Mathematische Grundlagen

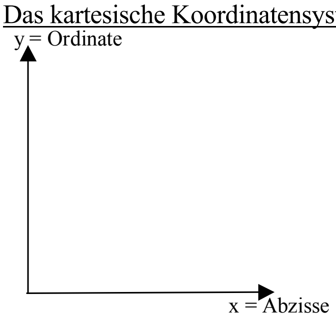
a) Auflösung quadratischer Gleichungen mit der pq-Formel

(1.1) $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ für $x^2 \pm px \pm q = 0$

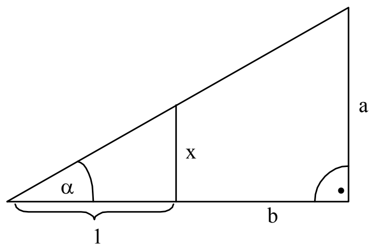
b) Auflösung quadratischer Gleichungen mit der abc-Formel

(1.2) $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$ für $ax^2 \pm bx \pm c = 0$

c) Das kartesische Koordinatensystem (x-Achse = Abzisse; y-Achse = Ordinate)



d) Der Strahlensatz



(1.3) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{x}{1} = x$

e) Ein Näherungsverfahren für Nullstellen: Die lineare Approximation/Interpolation (regula falsi)

(1.4) $x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_1)$

2. Finanzmathematik und investitionstheoretische Kennzahlen

a) Das Endvermögen einer Investitionsprojektes (EV_I)

(2.1) $EV_I = \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t}$

b) Der Kapitalwert (K) einer Zahlungsreihe (= Barwert, sofern die Zahlungen keinen Vorzeichenwechsel aufweisen)

(2.2) $K = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{-t}$

c) K im Fall einer nach der Anfangsauszahlung gleich bleibenden Zeitreihe von Einzahlungsüberschüssen

(2.3) $K = e_0 + e \cdot RBF\,(T; r)$ mit $RBF\,(T; r) = \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^t} = \frac{q^t - 1}{r \cdot q^t} = \frac{1 - q^{-t}}{r} = \sum_{t=1}^{T} q^{-t}$

d) Der Endwert (EW) einer Zahlungsreihe

(2.4) $EW = EV_I - EV_U = KW \cdot q^T = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{T-t}$

e) Die Annuität (e^*) einer Zahlungsreihe

(2.5) $e^* = K \cdot ANF\,(T; r)$ mit $ANF\,(T; r) = \frac{r \cdot q^t}{q^t - 1} = \frac{r}{1 - q^{-t}} = \frac{1}{RBF\,(T; r)} = \frac{1}{\sum_{t=1}^{T} q^{-t}} \Rightarrow K = e^* \cdot RBF\,(T; r)$

f) e^* in Abhängigkeit vom Tilgungssatz (TS)

(2.6) $e^* = K \cdot (r + TS)$

g) e^* im Fall einer nach der Anfangsauszahlung gleich bleibenden Zeitreihe von Einzahlungsüberschüssen

(2.7) $e^* = e - e'_0 \cdot ANF\,(T; r)$

h) Der interne Zinsfuß (r^*) eines Investitionsprojektes

(2.8) $\sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1 + r^*)^{-t} = 0$

i) r^* bei zwei Projektzahlungen („Typ einer Zero-Bond-Anlage/Null-Kouponanleihe")

(2.9) $r^* = \sqrt[T]{\frac{e_T}{-e_0}} - 1$

j) r^* bei einer Zahlungsreihe vom „Typ einer Kouponanleihe" mit jährlich nachschüssiger Zinsauszahlung

(2.10) $r^* = z$ mit z = jährliche nachschüssige Zinsauszahlung $\Rightarrow r^*$ = Nominalzins

k) r^* bei drei unmittelbar aufeinander folgenden Zahlungen

(2.11) $r^*_{1,2} = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}} - 1$

l) r^* bei gleich bleibenden Projekteinzahlungen (Näherungsformel)

(2.12) $\text{RBF}(T; r^*) = \frac{-e_0}{e}$

m) r^* bei ewigen Renten (Näherungsformel)

(2.13) $r^* = \frac{e}{-e_0}$

n) r^* mit der Approximationsmethode ermitteln (Regelfall)

(2.14) $\tilde{r}_I = \frac{r_N \cdot K_P - r_P \cdot K_N}{K_P - K_N}$

mit K_N = Kapitalwert unter Berücksichtigung von r_N
K_P = Kapitalwert unter Berücksichtigung von r_P
r_N = Zinssatz, bei dem der Kapitalwert (K_N) negativ ist
r_P = Zinssatz, bei dem der Kapitalwert (K_P) positiv ist

o) Der Tilgungs- und Anlageplan (TAP) zur Interpretation von r* (bei einer Normalinvestition!)

t	e_t	$Z_t = C_{t-1}\ \ r^*$	$e_t + Z_t$	$C_t = C_{t-1} + (e_t + Z_t)$
0	e_0	0	$e_0 + 0$	$0 + (e_0 + 0)$
T	e_T	$Z_T = C_{T-1}\ \ r^*$	$e_T + Z_T$	0, falls mit r* abgerechnet

mit Z_t = die im Zeitpunkt t erfolgende Zinsbelastung
C_t = Kontostand im Zeitpunkt t = Betrag, der bis zum Zeitpunkt t noch nicht abgetragenen Verbindlichkeiten

1. Interpretation: r* gibt die maximale „Kapitalkostenbelastung" an.
2. Interpretation: Der einfache Durchschnitt der Summe aller C_t-Werte ergibt die durchschnittliche Kapitalbindung.

p) Die Amortisationsdauer (t^*) eines Investitionsprojektes

(2.15) $\sum_{t=0}^{t^*-1} e_t \cdot q^{-t} \leq 0 < \sum_{t=0}^{t^*} e_t \cdot q^{-t}$

q) Eignung der Kennzahlen für projektindividuelle Vorteilhaftigkeitsentscheidungen und Auswahlentscheidungen

Kennzahl	**projektindividuelle Vorteilhaftigkeitsentscheidungen**	**Auswahlentscheidungen**
Kapitalwert (K)	K > 0	$\max_i: K_i$, sofern $K_i > 0$
Endwert (EW)/ Endvermögen (EV)	$EW = EV_I - EV_U > 0$	nur bei gleicher Laufzeit oder Bezug auf gemeinsamen Zeitpunkt: $\max_i: EW_i(t')$, sofern $EW_i > 0$
Annuität (e^*)	$e^* > 0$	nur bei gleicher Laufzeit: $\max_i: e^*$, sofern $e^* > 0$
Interner Zinsfuß (r^*)	nur bei Normalinvestitionen: $r^* > r$	nicht geeignet, da die Bezugsbasen der Relativzahl r^* nicht übereinstimmen
Amortisationsdauer (t^*)	insbesondere bei Normalinvestitionen: $t^* \leq T$	nicht geeignet, da alle Zahlungen nach t^* unberücksichtigt bleiben

r) K einer Differenzinvestition (D_{I-II})

(2.16) $D_{I-II} = K_I - K_{II} = \sum_{t=0}^{T} (e_{It} - e_{IIt}) \cdot q^{-t}$

3. Investitionsrechnung unter Berücksichtigung von Steuern

a) Modifikation der relevanten Zahlungsreihe

Schritte	Größe
(1)	Zeitpunkt (t)
(2)	Zahlung *vor* Steuern (e_t)
(3)	Abschreibung (α_t)
(4) = (2) - (3)	Gewinn (Δg_t) = $e_t - \alpha_t$
(5) = s · (4)	Steuern (S) = $s \cdot \Delta g_t$
(6) = (2) - (5)	Zahlung *nach* Steuern (e'_t) = $e_t - s \cdot \Delta g_t$

b) Modifikation des Kalkulationszinssatzes (r)

(3.1) $r' = r \cdot (1 - s)$

mit r' = Nettozins (nach Steuern) = der um den Steuersatz (s) reduzierte Kalkulationszins
r = Bruttozins (vor Steuern)
s = Steuersatz (idR als Dezimalzahl)

c) K nach Steuern (K´)

(3.2) $K' = \sum_{t=0}^{T} e'_t \cdot (1 + r')^{-t}$ bzw. ausführlich, da $e_t' = e_t - s_t$ gilt:

(3.3) $K' = \sum_{t=0}^{T} e_t (1 + r')^{-t} - \sum_{t=0}^{T} s_t \cdot (1 + r')^{-t}$

mit $\sum_{t=0}^{T} s_t \cdot (1 + r')^{-t}$ = Steuerbarwert (SB)

d) EW nach Steuern (EW´)

(3.4) $EW' = \sum_{t=0}^{T} e'_t \cdot (1 + r')^{T-t}$ bzw. ausführlich, da $e_t' = e_t - s_t$ gilt:

(3.5) $EW' = \sum_{t=0}^{T} e_t (1 + r')^{T-t} - \sum_{t=0}^{T} s_t \cdot (1 + r')^{T--t}$

mit $\sum_{t=0}^{T} s_t \cdot (1 + r')^{T-t}$ = Steuerendwert (SE)

e) Steuerparadoxon

(3.6) $K < 0 < K' \Leftrightarrow EW < 0 < EW' \Leftrightarrow K < 0 < K'$

f) Die Zerlegungsformel für den Gesamteffekt der Steuerwirkungen (ΔK)

(3.7) $\Delta K = K'(r_K') - K(r_K) = [K'(r_K) - K(r_K)] + [K'(r_K') - K'(r_K)]$

mit $K'(r_K')$ = Kapitalwert nach Steuern
r_K' = $r_K - s$ = der um den Steuersatz reduzierte Kalkulationszins
$K'(r_K) - K(r_K)$ = Volumeneffekt (V) = Brutto- $\Rightarrow$ Nettozahlungen
$K'(r_K') - K'(r_K)$ = Zinseffekt (Z) = Brutto- $\Rightarrow$ Nettofinanzierungskosten

g) Wirkung der Einzeleffekte auf den Kapitalwert

Effekt	Wirkung auf den Kapitalwert (bei Normalinvestition!)
Volumeneffekt (V)	↓ oder in besonders gelagerten Fällen auch schon einmal ↑
Zinseffekt (Z)	↑

4. Investitionsrechnung unter Unsicherheit

a) Die Portefeuillerendite (e_{Pj})

(4.1) $e_{Pj} = \sum_{j=1}^{n} e_{Pj} \cdot x_j$

b) Die Portefeuillerendite mit 2 Wertpapieren (e_{Pj})

(4.2) $e_{Pj} = x_1 \cdot e_{1j} + x_2 \cdot e_{2j}$

c) Der Erwartungswert der Rendite eines Portefeuilles (μ_P)

(4.3) $\mu_P = \sum_{j=1}^{n} e_{Pj} \cdot p_j$

d) Der Erwartungswert der Rendite eines Portefeuilles mit 2 Wertpapieren (μ_P)

(4.4) $\mu_P = x_1 \cdot \mu_1 + x_2 \cdot \mu_2$

e) Die Varianz eines Portefeuilles/das Portefeuillerisiko ($\sigma_P{}^2$)

(4.5) $\sigma_P{}^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{Pj} - \mu_p)^2 \cdot p_j = \sum_{j=1}^{n} (p_j - e_{pj}^2) - \mu_p{}^2$

f) Die Varianz eines Portefeuilles mit 2 Wertpapieren ($\sigma_P{}^2$)

(4.6) $\sigma_P{}^2 = x_1{}^2 \sigma_1{}^2 + x_2{}^2 \sigma_2{}^2 + 2\, x_1\, x_2\, \sigma_1\, \sigma_2\, \rho_{12}$

g) Die Kovarianz zweier Wertpapiere (cov_{12})

(4.7) $cov_{12} = \sum_{j=1}^{n} (e_{1j} - \mu_1) \cdot (e_{2j} - \mu_2) \cdot p_j$

h) Der Korrelationskoeffizient zweier Wertpapiere (ρ_{12})

(4.8) $\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$

mit $\rho_{12} = 1$ bedeutet vollständig positive Korrelation $\Rightarrow$ vollständige Risikokumulation

$\rho_{12} = 0$ bedeutet vollständig unabhängige Korrelation $\Rightarrow$ typischer Fall der Risikodiversifikation

$\rho_{12} = -1$ bedeutet vollständig negative Korrelation $\Rightarrow$ vollständiges Hedging

i) Erwartungswert des Kapitalwertes (μ_K)

(4.9) $\mu_K = \sum_{t=0}^{T} \mu_t$

mit μ_t = Erwartungswerte der bereits auf t = 0 abgezinsten Einzahlungsüberschüsse in den Zeitpunkten t = 0, 1, ..., T

j) Die Varianz des Kapitalwertes ($\sigma_K{}^2$)

(4.10) $\sigma_K{}^2 = \sum_{t=0}^{T} \sigma_t^2 + 2 \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{\tau=t+0}^{T} \sigma_t \cdot \sigma_\tau \cdot \rho_{t\tau}$

mit $\sigma_t{}^2$ = Varianzen der bereits auf t = 0 abgezinsten Einzahlungsüberschüsse in den Zeitpunkten t = 0, 1, ..., T

$\rho_{t\tau}$ = der auf die Einzahlungsbarwerte zweier Perioden t und τ ($\tau > 1$) bezogene Korrelationskoeffizient

k) $\sigma_K{}^2$ bei völliger Vernachlässigung stochastischer Zusammenhänge ($\rho_{t\tau} = 0$)

(4.11) $\sigma_K{}^2 = \sum_{t=0}^{T} \sigma_t^2$

l) Erwartungswert des Gesamtunternehmens mit Durchführung des Projektes P (μ_M)

(4.12) $\mu_M = \mu_0 + \mu_P$

mit μ_0 = Erwartungswerte des Gesamtunternehmens ohne Durchführung des Projektes P

μ_P = Erwartungswerte des Projektes P

m) Varianz des Gesamtunternehmens mit Durchführung des Projektes P ($\sigma_M{}^2$)

(4.13) $\sigma_M{}^2 = \sigma_0{}^2 + \sigma_P{}^2 + 2\, \sigma_0\, \sigma_P\, \rho_{0P}$

mit $\sigma_0{}^2$ = Varianz des Gesamtunternehmens ohne Durchführung des Projektes P

$\sigma_P{}^2$ = Varianz des Projektes P

ρ_{0P} = Korrelationskoeffizient zwischen dem Kapitalwert des Gesamtunternehmens (ohne das betrachtete Projekt) und dem Kapitalwert des neuen Projektes

n) Veränderung des Gesamterwartungswertes ($\Delta\mu$)

(4.14) $\Delta\mu = \mu_M - \mu_0 = \mu_P$

o) Veränderung der Gesamtstandardabweichung ($\Delta\sigma$)

(4.15) $\Delta\sigma = \sigma_M - \sigma_0 = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_P^2 + 2\, \sigma_0\, \sigma_P\, \rho_{0P}} - \sigma_0$

o) Analyse der Veränderung des Unternehmensrisikos gemessen an σ

Fall	A	B	C	D
ρ_{0P}	+1	0	$-\frac{\sigma_P}{2\sigma_0}$	-1
$\Delta\sigma$	σ_P	$\sqrt{\sigma_0^2+\sigma_P^2}-\sigma_0 \Rightarrow 0 < \Delta\sigma < \sigma_P$	0	$-\sigma_P$

p) Die Risiko-Nutzen-Funktion (RNF) des Bernoulli-Prinzips (ϕ)

(4.16) $\phi = \mu + \alpha \quad f(\sigma) = \mu + \alpha \quad (\mu^2 + \alpha^2)$

mit ϕ = Präferenzwert zur Beurteilung eines Investitionsprojektes

α < 0 und Ausdruck der individuellen Risikoaversion des Entscheidenden

5. Barwerte (B) sicherer Zahlungsreihe

a) Allgemeine Barwert-Definition

(5.1) $B = \sum_{t=1}^{T} z_t \cdot q^{-t}$

b) B bei Zahlungen gleicher Höhe

(5.2) $B = z \quad RBF\ (T; r)$

c) B einer ewigen Rente

(5.3) $B = \frac{z}{r}$

d) B bei Zahlungen gleicher Höhe nach dem Zeitraum τ

(5.4) $B = \sum_{t=1}^{\tau} z_t \cdot q^{-t} + z \quad RBF\ (z^*; r) \quad q^{-\tau}$

e) B einer „ewigen Rente" nach dem Zeitraum τ

(5.5) $B = \sum_{t=1}^{\tau} z_t \cdot q^{-t} + \frac{z}{r} \quad q^{-\tau}$

c) B konstant wachsender Zahlungen bei Übereinstimmung von r und Wachstumsrate (α)

(5.6) $B = \frac{z}{\beta} \quad T$ mit $\beta = q = 1 + \alpha$

6. 3 Ansätze zur Ermittlung eines unsicherheitsadjustierten Barwerts

a) Globaler Unsicherheitsabschlag

(6.1) $B^* = \sum_{t=1}^{T} \bar{z}_t \cdot q^{-t} - U$

mit B^* = unsicherheitsadjustierter Barwert

$\bar{z}_t$ = repräsentativer Wert

U = Unsicherheitsabschlag

b) Zeitpunktspezifische Unsicherheitsabschläge

(6.2) $B^* = \sum_{t=1}^{T} (\bar{z}_t - U_t) \cdot q^{-t}$

mit U_t = Unsicherheitsabschläge

c) Unsicherheitsadjustierter Kalkulationszins

(6.3) $B^* = \sum_{t=1}^{T} \bar{z}_t \cdot q^{*\,-t}$ mit $q^* = (1 + r + \rho)$

mit q^* = um Unsicherheitszuschlag ergänzter Zinsfaktor

p = Unsicherheitszuschlag

7. Finanzmanagement

a) Näherungsformel für die Effektivverzinsung einer Anleihe (r')

(7.1) $r' = \frac{i + \frac{C^R - C^S}{T}}{C^S} \cdot 100$

mit r' = aus Anlegersicht verlangte Effektivverzinsung

T = Restlaufzeit

C^S = Börsenkurs einer gesamtfälligen Anleihe = Schuldverschreibung

C^R = Rückzahlungskurs einer gesamtfälligen Anleihe (idR 100%)

b) Näherungsformel für die Effektivverzinsung eines Kredites (r)

$$(7.2) \quad r = \frac{i + \frac{C_R + C_E}{\bar{t}}}{C_E} \cdot 100$$

mit i = Nominalzins + ggf. zusätzliche laufende Kreditkosten
C_E = Auszahlungskurs = 100 - Disagio - ggf. zusätzliche einmalige Kreditkosten
C_R = Rückzahlungskurs des Kredits (idR 100%)
$\bar{t}$ = „mittlere“ Kreditlaufzeit, definiert als Durchschnitt aus der gesamten Kreditlaufzeit und der Laufzeit bis zur ersten Tilgungsrate

c) Der effektive Jahreszins eines Lieferantenkredites (r_L)
Unter Vernachlässigung unterjährlicher Zinseffekte, lässt sich der „effektive Jahreszins“ eines Lieferantenkredites (r_L; Skontoverzicht) wie folgt berechnen:

$$(7.3) \quad r_L = \frac{\text{Jahresäquivalent}}{\text{effektive Kreditsumme}} = \frac{S \cdot R \cdot \frac{360\,\text{Tage}}{t_2 - t_1}}{R \cdot (1 - S)} = \frac{S}{1 - S} \cdot \frac{360\,\text{Tage}}{t_2 - t_1}$$

mit S = Skonto in Prozent
R = Rechnungsbetrag in Währungseinheiten
t_1 = Skontofrist in Tagen
t_2 = Zahlungsziel in Tagen

d) Leasing

α) **Vollamortisationsvertrag (ohne Kauf- oder Mietverlängerungsoption)**

$$(7.4) \quad AK = (LR - VK) \cdot RBF\,(t; i)$$

mit AK = Anschaffungskosten
LR = Leasingrate
VK = Verwaltungskosten

Daraus folgt für LR:

$$(7.5) \quad LR = \frac{AK}{RBF\,(t;i)} + VK = AK \cdot ANF\,(t;i) + VK$$

β) **Teilamortisationsvertrag mit Andienungsrecht**

$$(7.6) \quad AK = (LR - VK) \cdot RBF\,(t; i) + A \cdot (1 + i)^{-t}$$

mit A = Andienungsrecht

Daraus folgt für LR:

$$(7.7) \quad LR = \frac{AK - A\,(1+i)^{-t}}{RBF\,(t;i)} + VK = [AK - A\,(1+i)^{-t}] \cdot ANF\,(t;i) + VK$$

χ) **Kündbarer Teilamortisationsvertrag mit Andienungsrecht und Veräußerungserlös**

$$(7.8) \quad AK = (LR - VK) \cdot RBF\,(t; i) + (A + VP) \cdot (1 + i)^{-t}$$

mit VP = Veräußerungserlös

Daraus folgt für LR:

$$(7.9) \quad LR = \frac{AK - (A + VP) \cdot (1+i)^{-t}}{RBF\,(t;i)} + VK = [AK - (A + VP) \cdot (1+i)^{-t}] \cdot ANF\,(t;i) + VK$$