Formelsammlung für Produktions- und Kostentheorie

INHALTSVERZEICHNIS

1. Mathematische Grundlagen

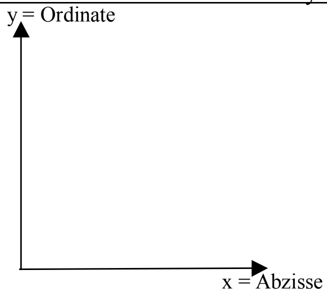
a) Auflösung quadratischer Gleichungen mit der pq-Formel

(1.1) $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ für $x^2 \pm px \pm q = 0$

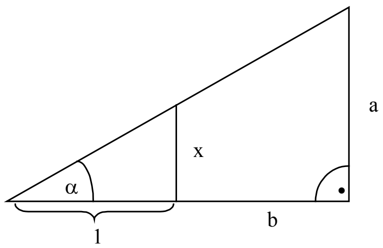
b) Auflösung quadratischer Gleichungen mit der abc-Formel

(1.2) $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$ für $ax^2 \pm bx \pm c = 0$

c) Das kartesische Koordinatensystem (x-Achse = Abzisse; y-Achse = Ordinate)



d) Der Strahlensatz



(1.3) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{x}{l} = x$

e) Der Langrage-Ansatz (für die Bestimmung der Minimalkostenkombination bei substitutionaler Produktion)

(1.4) Min $K = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i$

unter der Nebenbedingung (udN)

(1.5) $\overline{x} = x \cdot (r_1, ..., r_I)$ bzw. $\overline{x} - x \cdot (r_1, ..., r_I) = 0$.

Dieses Kostenminimierungsproblem mit einer Gleichung als Restriktion kann durch die Minimierung der Langrange-Funktion (L) ersetzt werden:

(1.6) Min. $L (r_1, ..., r_I, \lambda) = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i + \lambda \cdot [\overline{x} - x \cdot (r_1, ..., r_I)]$

Indem man L nach den Variablen $r_1, ..., r_I, \lambda$ partiell differenziert und diese partiellen Ableitungen gleich Null setzt, erhält man die notwendigen Bedingungen für die bezüglich $\overline{x}$ kostenminimalen Faktoreinsätze:

(1.7) $\frac{\partial L}{\partial r_i} = q_i - \lambda \frac{\partial x}{\partial r_i} = 0$, $i = 1, ..., I$

(1.8) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \overline{x} - x \cdot (r_1, ..., r_I) = 0$.

Für die beiden Faktoren i und j ergeben sich daraus die Beziehungen

(1.9) $q_i = \lambda \cdot \frac{\partial x}{\partial r_i}$ sowie $q_j = \lambda \cdot \frac{\partial x}{\partial r_j}$ und daraus folgt

(1.10) $\frac{q_i}{q_j} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{\partial x}{\partial r_j}}$.

In den Kostenminima verhalten sich also die Faktorpreise zueinander wie die Grenzproduktivitäten der Faktoren. Andererseits ist auf jeder Produktionsisoquante das totale Grenzprodukt gleich Null, d.h. es gilt

(1.11) $dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + ... + \frac{\partial x}{\partial r_I} \cdot dr_I = 0$ und daher

(1.12) $s_{ij} = -\dfrac{\partial r_i}{\partial r_j} = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial r_j}}{\dfrac{\partial x}{\partial r_i}}$.

Die GRS (s_{ij}) zwischen den Faktoren i und j ist damit umgekehrt proportional zu den Grenzproduktivitäten dieser beiden Faktoren. Setzt man die abgeleiteten Beziehungen (1.10) und (1.12) zusammen, so hat man zusammenfassend als Bedingungen für die Minimalkostenkombinationen substitutionaler Produktionsfunktionen

(1.13) $\dfrac{q_i}{q_j} = \dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial r_i}}{\dfrac{\partial x}{\partial r_j}} = \dfrac{1}{s_{ij}} = s_{ji}$, $i \neq j$; $i, j \in \{1, ..., I\}$,

d.h. bei kostenminimalem Mengeneinsatz aller Produktionsfaktoren müssen deren Preise im selben Verhältnis wie die Grenzproduktivitäten und im umgekehrten Verhältnis zur GRS stehen. Diese Bedingungen sind für alle Punkte auf der Expansionslinie erfüllt. Multipliziert man die für die jeweiligen Produktionsniveaus x kostenminimalen Faktoreinsatzmengen r_i^* (x) mit ihren Preisen q_i, so erhält man nach Summation die Kosten in Abhängigkeit der Produktion, d.h. die Kostenfunktion

(1.14) $K(x) = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i$

2. 7 allgemeine Annahmen an Technologien

a) Input ohne Output ist möglich

(2.1) $\Re_-^K \subset \boldsymbol{T}$, $\Re_-^K = \{v \in \Re^K \mid v_k \leq 0 \text{ für alle } k \in \{1, \ldots, K\}\}$

Verschwendung und *Produktionsstillstand* sind möglich; graphisch betrachtet müssen der *Nullpunkt und der gesamte/komplette 3. Quadrant* (negative Orthant) Teilmenge der Technologie sein.

b) Produktionen mit positivem Output sind möglich

(2.2) $C\Re_-^K \cap \boldsymbol{T} \neq 0$

Es gibt nicht ausschließlich Technologien, die aus Gütervernichtung oder Produktionsstillstand bestehen; graphisch muss die Produktionsmöglichkeitsmenge zumindest einen Punkt aus dem 1., 2. *oder* 4. Quadranten umfassen.

c) Irreversibilität (= Nicht-Umkehrbarkeit) der Produktion

(2.3) $\boldsymbol{T} \cap (-\boldsymbol{T}) = \{0\}$

Es gibt *keinen Output ohne Input*; graphisch betrachtet darf man keine umgekehrten Aktivitäten durch Spiegelung von Punkten aus dem 1. *und* 3. Quadranten am Ursprung erzeugen können.

d) Es existiert kein Schlaraffenland

Kombination aus den Annahmen a) und c); graphisch darf *kein* Punkt im 1. Quadrant liegen.

e) Abgeschlossenheit der Technologie

Hierfür gibt es nur mathematische Gründe; graphisch muss es einen Rand der Technologie geben, der zu ihr zählt.

f) Beliebige Teilbarkeit der Güter

Damit können die meist einfacheren Rechenverfahren auf zusammenhängenden Mengen angewandt werden.

g) Homogenität der Güter

Die Einheiten eines Faktors bzw. Produktes sind gleich und damit untereinander austauschbar.

3. 5 Grundformen von Technologien

a) Größendegression einer Technologie

(3.1) Wenn für alle $v \in T$ gilt: $\lambda \cdot v \in T$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$.

mit λ = Leistungsintensität

w = Aktivität

v = Gütervektor

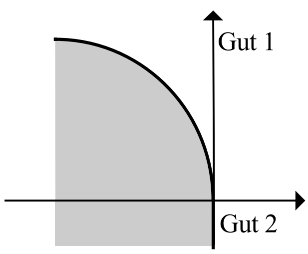


Abb.: Größendegression

T = Technologie.

b) <u>Größenprogression</u> einer Technologie

(3.2) Wenn für alle $v \in T$ gilt: $\lambda \cdot v \in T$ mit $\lambda \geq 1$.

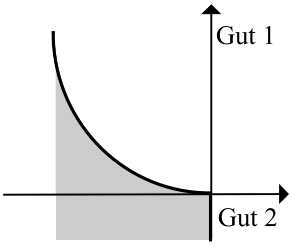


Abb.: Größenprogression

c) <u>Größenproportionalität</u> einer Technologie

(3.3) Wenn für alle $v \in T$ gilt: $\lambda \cdot v \in T$ mit $\lambda \geq 0$.

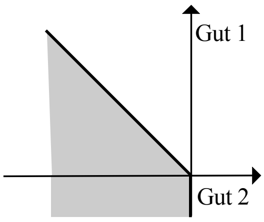


Abb.: Größenproportionalität

d) <u>Additive Technologie</u>

(3.4) Wenn für alle $v, w \in T$ gilt: $v + w \in T$.

Dies trifft für *Technologien mit Größenprogression und/oder -proportionalität*, aber nicht mit Größendegression zu.

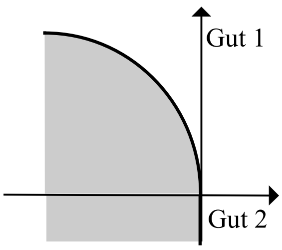
e) <u>Lineare Technologie</u>

(3.5) Wenn für alle $v, w \in T$ gilt: $\lambda \cdot (v + w) \in T$ mit $\lambda \geq 0$.

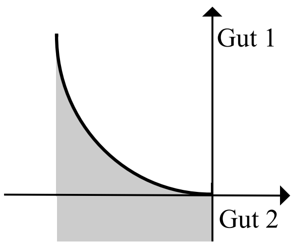
Dies trifft nur für *additive Technologien mit Größenproportionalität* zu.

f) <u>Beispiele für Annahmen an Technologien und Technologie-Eigenschaften</u>

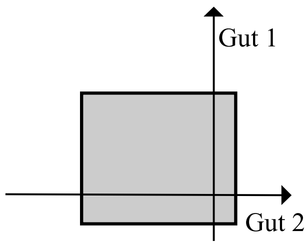
<u>Aufgabe:</u> Gebe in Form einer Tabelle an, welche Annahmen an Technologien gestellt werden und welche Eigenschaften Technologien aufweisen können. Kreuze dort an, welche der Annahmen und Eigenschaften durch die schraffierten Gütermengen in den Abbildungen erfüllt sind (Inputmengen negativ, Outputmengen positiv)! (Quellen: Fandel, G.: Produktions- und Kostentheorie, 3. Aufl., Berlin u.a., 1991, S. 42 f.; EA 10/95, Aufgabe 1 b); EA 10/96, Aufgabe 1 b); BWT II, KE 1, 1. Teil, Produktions- und Kostentheorie, 4/92, Übungsaufgabe 1, S. 20-22.)



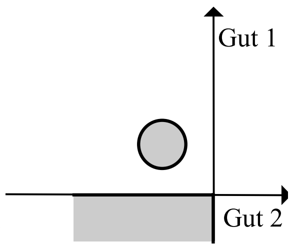
Beispiel 1



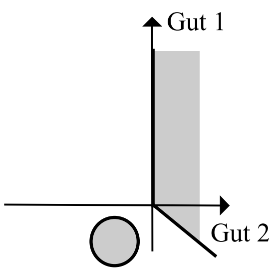
Beispiel 2



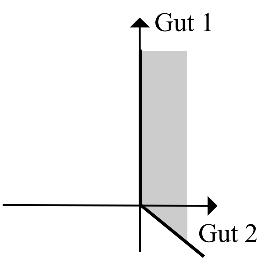
Beispiel 3



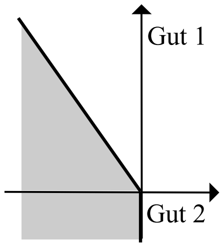
Beispiel 4



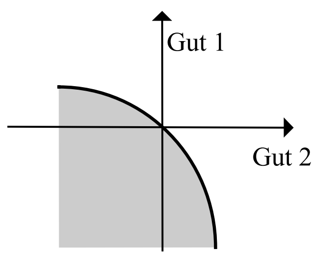
Beispiel 5



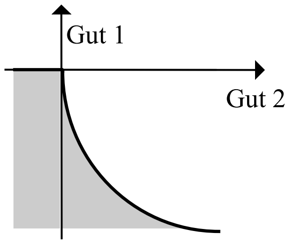
Beispiel 6



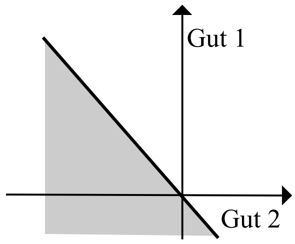
Beispiel 7



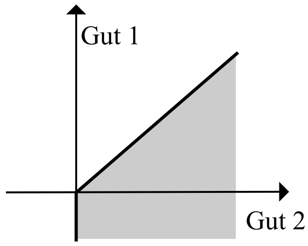
Beispiel 8



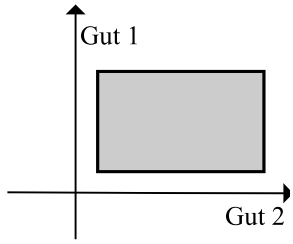
Beispiel 9



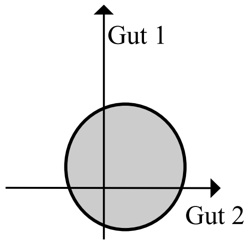
Beispiel 10



Beispiel 11



Beispiel 12



Beispiel 13

Lösungen

Charakteristik	Beispiele												
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Annahmen													
Input ohne Output	x	x	x	x			x	x	x	x			
Positive Ergebnisse	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x[1]	x	x	x
Nicht-Umkehrbarkeit	x	x		x		x	x	x	x		x	x	
kein Schlaraffenland	x	x		x			x	x	x	x			
Abgeschlossenheit	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Eigenschaften													
Größendegression	x		x			x	x	x		x	x		x
Größenprogression		x				x	x		x	x	x		
Größenproportionalität						x	x			x	x		
Additivität		x				x	x		x	x	x		
Linearität						x	x			x	x		

4. Der Effizienzbegriff/Das Effizienzkriterium

a) Dominanz

(4.1) Eine Produktion $w \in T$ dominiert eine Produktion $v \in T$, wenn $w \geq v$ und $w_k > v_k$ für mindestens ein $k \in \{1, ..., K\}$ gilt.

b) Der Effizienzbegriff

Der Effizienzbegriff/das Effizienzkriterium läßt sich in folgende zwei gleichwertige Aussagen kleiden:

α) **Das Postulat der technischen Maximierung**
Eine Produktion $v \in T$ ist effizient, wenn bei gegebenen Faktoreinsatzmengen maximale Produktmengen erzielt werden und dabei keine Faktormengen verschwendet werden.

β) **Das Postulat der technischen Minimierung**
Eine Produktion $v \in T$ heißt effizient, wenn die vorgegebenen Produktmengen durch minimale Faktoreinsatzmengen hergestellt werden und dabei keine Produktquantitäten verschenkt werden.

[1] Andere, aber m.E. falsche Lösung in Musterlösung zu Aufgabe 1b) der EA 10/96.

5. Produktionstheoretische Grundbegriffe zur Charakterisierung von Produktionsfunktionen

a) Partialanalyse

Partialanalyse = wie ändert sich die Ausbringungsmenge x, wenn die Einsatzmenge nur *eines* Faktors r_i (i = 1, ..., m) verändert wird und die Einsatzmengen der übrigen Produktionsfaktoren unverändert bleiben.

α) (Durchschnitts-)**Produktivität** = Durchschnittsprodukt des Faktors i

(5.1) $\hat{a}_i = \frac{x}{r_i}$

β) **Produktionskoeffizient** (a_i) des Faktors i (= Kehrwert der Produktivität = $\hat{a}_i$)

(5.2) $a_i = \frac{r_i}{x}$

χ) (partielle) **Grenzproduktivität** = Grenzertrag

(5.3) $\frac{\partial x}{\partial r_i}$

Bei zunehmendem Faktoreinsatz r_i werden 3 Fälle unterschieden:

1. $\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0$ Ertragszunahme (positiver Grenzertrag),
2. $\frac{\partial x}{\partial r_i} = 0$ Ertragskonstanz (Grenzertrag ist Null),
3. $\frac{\partial x}{\partial r_i} < 0$ Ertragsabnahme (negativer Grenzertrag).

δ) **Änderung** des Grenzertrags/**der** (partiellen) **Grenzproduktivität**

(5.4) $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2}$

Die Änderung des Grenzertrags ergibt sich aus der Ableitung des Grenzertrags der jeweilig betrachteten Einsatzmenge r_i, d.h.

1. $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} > 0$ zunehmende Grenzerträge,
2. $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = 0$ konstante Grenzerträge,
3. $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0$ abnehmende Grenzerträge.

χ) **Das partielle Grenzprodukt** (dx) zwischen Faktor i und dem Output x

(5.5) $dx = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot dr_i$

ε) **Die Produktionselastizität** (ε)

(5.6) $$\varepsilon = \frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial r_i}{r_i}} = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{x}{r_i}} = \frac{\text{Grenzproduktivität}}{\text{Durchschnittsproduktivität}}$$

b) Totalanalyse

Totalanalyse = wie ändert sich die Produktionsmenge x, wenn die Einsatzmengen *aller* Produktionsfaktoren r_i (i = 1, ..., m) variiert werden.

α) **Das totale Grenzprodukt** (dx) zwischen allen Faktoren i und dem Output x

(5.7) $dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot dr_1 + ... + \frac{\partial x}{\partial r_I} \cdot dr_I = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot dr_i$

β) **Die Niveauvariation und Homogenität** (λ)

Eine Produktionsfunktion heißt homogen vom Grade t, wenn es eine Zahl t ≥ 0 gibt, so daß für jeden Proportionalitätsfaktor λ > 0 gilt:

(5.8) $\lambda^t x = x(\lambda r_i, ..., \lambda r_m)$

D.h. werden alle Faktoreinsatzmengen mit der Zahl λ multipliziert, so erhöht sich die Ausbringungsmenge um den Faktor λ^t. Hinsichtlich des Wertes von t werden folgende 3 Fälle unterschieden:

1. t = 1 [die Produktmenge verändert sich proportional (linear) zur Niveauvariation; Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen linearhomogen (homogen vom Grade 1)],
2. t > 1 [die Produktmenge verändert sich überproportional (progressiv) zur Niveauvariation; Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen überlinearhomogen],
3. t < 1 [die Produktmenge verändert sich unterproportional (degressiv) zur Niveauvariation; Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen unterlinearhomogen].

χ) **Die Skalenelastizität** (t; stimmt mit dem Homogenitätsgrad der Produktionsfunktion überein)

$$(5.9)\quad t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{x}$$

Entsprechend den verschiedenen Homogenitätsformen werden auch 3 Fälle bei der Skalenelastizität unterschieden:

1. $t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = 1$ (konstante Skalenerträge),
2. $t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} > 1$ (zunehmende Skalenerträge),
3. $t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} < 1$ (abnehmende Skalenerträge).

δ) **Das Wicksel-Johnson-Theorem** (Skalenelastizität = Summe aller Produktionselastizitäten)
Das Wicksel-Johnson-Theorem = Skalenelastizitätsgleichung, die zeigt, dass die Skalenelastizität gleich der Summe aller Produktionselastizitäten ist.

$$(5.10)\quad t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_i}{x} + ... + \frac{\partial x}{\partial r_m} \cdot \frac{r_m}{x} = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_m .$$

c) Die Grenzrate der Substitution (GRS; s_{ij})
Für die GRS (s_{ij}) gilt:

- Sie dient der Messung der Substitutionalität zwischen 2 Faktoren (i und j).
- Sie ist stets für eine konstante Ausbringungsmenge ($\bar{x}$) zwischen je 2 Faktoren (i und j) definiert.
- Sie gibt ausgehend von einem festen Produktionspunkt an, um wieviel Einheiten die Einsatzmenge des Faktors j erhöht werden muss (bzw. erniedrigt werden kann), wenn der Einsatz des Faktors j um eine – infinitisimal kleine – Einheit reduziert (bzw. vermehrt) wird und bei Konstanz aller übrigen Faktoreinsatzmengen dieselbe Produktionsmenge erzielt werden soll.

$$(5.11)\quad s_{ij} = -\left.\frac{d r_i}{d r_j}\right|_{\bar{x}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}} \text{ mit } \bar{x} > 0,$$

d.h. es gibt folgende zwei Möglichkeiten die GRS (s_{ij}) zwischen den Faktoren i und j zu berechnen:
1. Als Quotient aus den Grenzproduktivitäten der Faktoren j und i (in umgedrehter Reihenfolge). Es gilt:

$$(5.12)\quad s_{ij} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}} = \frac{\text{Grenzproduktivität des Faktors j}}{\text{Grenzproduktivität des Faktors i}} .$$

2. Isoquante $\bar{x}$ in Bezug auf Faktor i bilden und nach dem Faktor j ableiten. Es gilt:

$$(5.13)\quad s_{ij} = -\left.\frac{d r_i}{d r_j}\right|_{\bar{x}} \text{ mit } \bar{x} > 0.$$

6. Die Gutenberg-Produktionsfunktion

1) Symbole und Begriffe

α) **Die Verbrauchsfunktion** $[\rho_i(\lambda)]$

$$\rho_i(\lambda) = \frac{r_i(\lambda)}{b(\lambda)}$$

β) **Die „monetäre" Verbrauchsfunktion** $[q_i \quad \rho_i(\lambda)]$

$$q_i \quad \rho_i(\lambda) = q_i \quad \frac{r_i(\lambda)}{b(\lambda)}$$

χ) **Die Kosten-Leistungsfunktion** $[k(\lambda)]$

$$k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot \rho_i(\lambda) \qquad \text{mit } i = 1,2,\ldots,m$$

δ) **Die Zeitkostenleistungsfunktion** $[z(\lambda)]$

$$z(\lambda) = \lambda \quad k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot \rho_i(\lambda) \cdot \lambda \qquad \text{mit } i = 1,2,\ldots,m$$

b) Bestimmung der Kostenleistungsfunktion und der Zeitkostenleistungsfunktion aus der Faktorverbrauchsfunktion

α) Kostenleistungsfunktion $[k(\lambda)]$

$$(6.1) \quad k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot \rho_i(\lambda) \qquad \text{mit } i = 1,2,\ldots,m$$

β) Zeitkostenleistungsfunktion $[z(\lambda)]$

$$(6.2) \quad z(\lambda) = \lambda \quad k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} q_i \cdot \rho_i(\lambda) \cdot \lambda \qquad \text{mit } i = 1,2,\ldots,m$$

χ) Parameter (λ und t)

$0 \leq \lambda \leq \lambda^{max}$ und $0 \leq t \leq t^{max}$

c) Ermittlung der Kostenfunktion sowohl für die zeitliche als auch die intensitätsmäßige Anpassung sowie der Anpassungsbereiche

α) Bestimmung der Optimalität (λ^*)

$$(6.3) \quad \frac{dk(\lambda)}{d\lambda} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow \lambda^*$

β) Der Bereich zeitlicher Anpassung

$0 \leq x \leq t^{max} \quad \lambda^*$

χ) Bestimmung der Kostenfunktion bei zeitlicher Anpassung

7. 3 Lagerhaltungsmodelle

a) Symbole

α) **Der Lagerbestand (b)**

b = der Lagerbestand

β) **Der maximaler Lagerbestand (b^{max})**

$b^{max} = (z - s)\ t_a = (z - s)\ \frac{q}{z} = \left(1 - \frac{s}{z}\right)$ q = der maximale Lagerbestand

χ) **Der durchschnittlicher Lagerbestand ($\frac{b^{max}}{2}$)**

$\frac{b^{max}}{2} = \frac{q}{2}\ \left(1 - \frac{s}{z}\right)$ = der durchschnittliche Lagerbestand

δ) **Die bestellfixen Kosten (c)**

c = die bestellfixen Kosten (gemessen in DM, € bzw. GE);
sie hängen nur von der Anzahl der Bestellungen und nicht von der Bestellmenge ab

χ) **Die Bestellhäufigkeit im Planungszeitraum (h)**

h $= \frac{x}{q}$ = die Bestellhäufigkeit im Planungszeitraum (Auflagehäufigkeit)

ε) **Die Beschaffungskosten** (K_B)

K_B = die Beschaffungskosten

ϕ) **Die Lagerhaltungskosten** (K_L)

K_L = die Lagerhaltungskosten

γ) **Der Lagerkostensatz** (l)

l = der Lagerkostensatz (gemessen in DM, € bzw. GE pro gelagerter Materialeinheit im Planungszeitraum T)

η) **Die auftragsfixen Kosten und/oder auftragsgebundenen Kosten** (m)

m = die auftragsfixen Kosten und/oder auftragsgebundenen Kosten

ι) **Der vom Lieferanten gewünschte Stückpreis** (n)

n = der vom Lieferanten gewünschte Stückpreis

φ) **Der Beschaffungspreis des Materials** (p)

p = der Beschaffungspreis des Materials (gemessen in DM, € bzw. GE pro Stück)

κ) **Die Bestellmenge** (q)

q = die Bestellmenge (gemessen in Stück);
durch sie wird die Deckung des Gesamtbedarfs x in gleich große Perioden unterteilt

λ) **Die Lagerabgangsrate** (s)

s $= \frac{x}{T}$ = die Lagerabgangsrate

μ) **Die Länge des Planungszeitraums** (T)

T = die Länge des Planungszeitraums (gemessen in Tagen)

ν) **Die Anlieferungs- und Verbrauchsperiode** (t_a)

$t_a = \frac{q}{z}$ = die Anlieferungs- und Verbrauchsperiode

ο) **Die Bestellperiode** (t_b)

$t_b = \frac{1}{h} = \frac{q}{x} = t_a + t_v$ = die Bestellperiode

π) **Die reine Verbrauchsperiode** (t_v)

t_v = die reine Verbrauchsperiode

θ) **Der Gesamtbedarf** (x)

x = der Gesamtbedarf

ρ) **Die Lagerzugangsrate** (z)

z = die Lagerzugangsrate

b) Das HARRIS-Modell

α) Herleitung der optimalen Losgröße (q^{opt}) aus der Kostenfunktion

(7.1) $K_B = c + p \cdot q$

(7.2) $K_L = \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot 1 \cdot T$

(7.3) $K = K_B + K_L = c + p \cdot q + \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot 1 \cdot T$

(7.4) $k = \frac{K}{q} = \frac{c}{q} + p + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot 1 \cdot T$

(7.5) $\frac{dk}{dq} = -\frac{c}{q^2} + \frac{1}{2x} \cdot 1 \cdot T \overset{!}{=} 0 \qquad \Big| + \frac{c}{q^2}$

(7.6) $\frac{c}{q^2} = \frac{1}{2x} \cdot 1 \cdot T \qquad \Big| \cdot q^2 \qquad \Big| : \frac{1}{2x} \cdot 1 \cdot T$

(7.7) $q^2 = \frac{c}{\frac{1}{2x} \cdot 1 \cdot T} = \frac{2cx}{1 \cdot T} \qquad \Big| \sqrt{}$

(7.8) $q^{opt} = \sqrt{\frac{2cx}{1 \cdot T}}$

β) **Die optimale Bestellhäufigkeit** (h^{opt})

(7.9) $h^{opt} = \frac{x}{q^{opt}}$

χ) **Die optimale Lagerzeit** (t^{opt})

(7.10) $t^{opt} = \frac{q^{opt}}{x}$

c) Das Lagerhaltungsmodell mit sukzessivem Lagerzugang

α) Herleitung der optimalen Losgröße (q^{opt}) aus der Kostenfunktion

(7.11) $K_B = c + p \cdot q$

(7.12) $K_L = \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T \qquad \text{mit } s = \frac{x}{T}$

(7.13) $K = K_B + K_L = c + p \cdot q + \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T$

(7.14) $k = \frac{K}{q} = \frac{c}{q} + p + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T$

(7.15) $\frac{dk}{dq} = -\frac{c}{q^2} + \frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T \overset{!}{=} 0 \qquad \Big| + \frac{c}{q^2}$

(7.16) $\frac{c}{q^2} = \frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T \qquad \Big| \cdot q^2 \quad \Big| : \frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T$

(7.17) $q^2 = \frac{c}{\frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T} = \frac{2cx}{1 \cdot T} \qquad \Big| \sqrt{}$

(7.18) $q^{opt} = \sqrt{\frac{2cx}{\left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot 1 \cdot T}}$

β) **Die optimale Bestellhäufigkeit** (h^{opt})

(7.19) $h^{opt} = \frac{x}{q^{opt}}$

χ) **Die optimale Lagerzeit** (t^{opt})

(7.20) $t^{opt} = \frac{q^{opt}}{x}$

δ) **Die Lagerabgangsrate** (s)

(7.21) $s = \frac{x}{T}$

ε) **Der maximale Lagerbestand** (b^{max})

(7.22) $b^{max} = (z - s)\ t_a = (z - s)\ \frac{q}{z} = \left(1 - \frac{s}{z}\right)\ q$

d) Das Lagerhaltungsmodell mit mengenabhängigen Preis

α) Herleitung der optimalen Losgröße (q^{opt}) aus der Kostenfunktion

(7.23) $K_B = c + p \cdot q = c + \left(n + \frac{m}{q}\right) \cdot q \qquad \text{mit } p = n + \frac{m}{q}$

(7.24) $K_L = \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot l \cdot T$

(7.25) $K = K_B + K_L = c + \left(n + \frac{m}{q}\right) \cdot q + \frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot l \cdot T$

(7.26) $k = \frac{K}{q} = \frac{c}{q} + \left(n + \frac{m}{q}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot l \cdot T$

(7.27) $\frac{dk}{dq} = -\frac{c}{q^2} - \frac{m}{q^2} + \frac{1}{2x} \cdot l \cdot T \overset{!}{=} 0 \quad \Big|\ + \frac{c}{q^2} + \frac{m}{q^2}$

(7.28) $\frac{c}{q^2} + \frac{m}{q^2} = \frac{1}{2x} \cdot l \cdot T \qquad \Big|\cdot q^2 \qquad \Big|: \frac{1}{2x} \cdot l \cdot T$

(7.29) $q^2 = \frac{(c + m)}{\frac{1}{2x} \cdot l \cdot T} = \frac{2x \cdot (c + m)}{l \cdot T} \qquad \Big|\ \surd$

(7.30) $q^{opt} = \sqrt{\frac{2x \cdot (c + m)}{l \cdot T}}$

β) **Die optimale Bestellhäufigkeit** (h^{opt})

(7.31) $h^{opt} = \frac{x}{q^{opt}}$

χ) **Die optimale Lagerzeit** (t^{opt})

(7.32) $t^{opt} = \frac{q^{opt}}{x}$

δ) **Der mengenabhängige Preis** (p)

(7.33) $p = n + \frac{m}{q}$

e) Zusammenfassung und Gegenüberstellung der 3 Lagerhaltungsmodelle

Modell / Modelleigenschaft	HARRIS-Modell	Erweiterungsfall 1: Lagerhaltungsmodell mit sukzessivem Lagerzugang	Erweiterungsfall 2: Lagerhaltungsmodell mit mengenabhängigem Preis
K_B	$c + p \cdot q$	$c + p \cdot q$	$c + p \cdot q = c + \left(n + \frac{m}{q}\right) \cdot q$
K_L	$\frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot l \cdot T$	$\frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot \left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot l \cdot T$	$\frac{q}{2} \cdot \frac{q}{x} \cdot l \cdot T$
q^{opt}	$\sqrt{\frac{2cx}{l \cdot T}}$	$\sqrt{\frac{2cx}{\left(1 - \frac{s}{z}\right) \cdot l \cdot T}}$	$\sqrt{\frac{2x \cdot (c + m)}{l \cdot T}}$
Besonderheit	-	$b^{max} = (z - s)\ t_a = (z - s)\ \frac{q}{z} = \left(1 - \frac{s}{z}\right)\ q$	$p = n + \frac{m}{q}$